Enseignant·e·s: Dovi, Huruguen, Khukhro
Algèbre Linéaire - CMS
7 novembre 2023
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 1 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 11 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 27 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (1 point)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = x^2 + x + 4$. Que veut dire l'énoncé :

$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 4 \neq y\ ?$$

- ☐ f est surjective
- ☐ Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel y tel que $f(x) \neq y$
- ■ f n'est pas surjective
- ☐ $f(x) = 0$ n'a pas de solution

Correction. L'énoncé exprime que l'on peut trouver un y à l'arrivée qui n'a aucun antécédent x par f, c'est la définition même de la surjectivité.

Question 2 (1 point)
Soit $f : E \to F$ une application. Lequel des énoncés suivants est équivalent à l'énoncé "f est injective" ?

- ■ $\forall x \in E,\ f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$
- ☐ $\forall x, x' \in E,\ x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in E,\ f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'$
- ☐ $\exists x \in E,\ f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$

Correction. Une des formulations de l'injectivité est de dire que pour tout x dans l'ensemble de départ, $f(x)$ possède un unique antécédent par f, à savoir x.

Question 3 (1 point)
Laquelle des applications suivantes est injective ?

- ☐ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (0, x^2 + 2x + 1)$
- ☐ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (x^2, 2x^2 + 1)$
- ■ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (2x + 1, 2x + 1)$
- ☐ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (x^2, x^2)$

Correction. $(2x + 1, 2x + 1) = (2x' + 1, 2x' + 1) \Rightarrow 2x + 1 = 2x' + 1 \Rightarrow x = x'$.

Pour les **Questions 4, 5 et 6** ci-dessous on considère les propriétés P, Q et R suivantes portant sur $x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P &: x \text{ est multiple de } 2, \\ Q &: x \text{ est multiple de } 3, \\ R &: x \text{ est multiple de } 6. \end{aligned}$$

Question 4 (2 points)
Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

- ☐ $\exists x \in \mathbb{N},\ R$ et non$Q$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{N},\ (P$ ou $R) \Longrightarrow Q$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{N},\ P$ ou Q
- ■ $\forall x \in \mathbb{N},\ (P$ et $Q) \Longrightarrow R$

Correction. Si un nombre entier est multiple de 2 *et de* 3 *alors il est automatiquement multiple de* 6.

Question 5 (1 point)
Le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par la propriété caractéristique R est donné par :

- ■ $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x = 6k\}$
- ☐ $\{k \in \mathbb{N} \mid \forall x \in \mathbb{N}, x = 6k\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{R}, x = 6k\}$
- ☐ $\{x \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}, x = 6k\}$

Correction. x *est multiple de* 6 *si et seulement si il est de la forme* $6k$ *pour un certain entier naturel* k.

Question 6 (1 point)
Laquelle des affirmations suivantes est la réciproque de l'affirmation $\forall x \in \mathbb{N},$ non$P \Longrightarrow R$?

- ■ $\forall x \in \mathbb{N},\ R \Longrightarrow$ non$P$
- ☐ $\exists x \in \mathbb{N},$ non$P$ et non$R$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{N},$ non$R \Longrightarrow P$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{N},\ P \Longrightarrow$ non$R$

Correction. On échange l'hypothèse et la conclusion (on étudie le lien de causalité dans l'autre sens).

Pour les **Questions 7, 8 et 9** ci-dessous on donne un ensemble fini E et un sous-ensemble $A \subset E$ vérifiant :

$$\mathrm{Card}(E) = 14 \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(A) = 3.$$

On donne aussi les coefficients suivants, figurant dans le triangle de Pascal :

$$\binom{11}{0} = 1 \qquad \binom{11}{1} = 11 \qquad \binom{11}{2} = 55 \qquad \binom{11}{3} = 165 \qquad \binom{11}{4} = 330 \qquad \binom{11}{5} = 462.$$

Question 7 (2 points)
Combien existe-t-il de sous-ensembles B de E vérifiant :

$$\mathrm{Card}(B) = 8 \quad \text{et} \quad A \cap B = \varnothing\,?$$

- [ ] 55
- [ ] 462
- [x] 165
- [ ] 330

Correction. Comme $\complement_E A$ *possède* 11 *éléments, le nombre recherché vaut* $\binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165$.

Question 8 (2 points)
Combien existe-t-il de sous-ensembles C de E vérifiant :

$$\mathrm{Card}(C) = 6 \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(A \cap C) = 2\,?$$

- [x] 990
- [ ] 495
- [ ] 165
- [ ] 330

Correction. Pour construire C*, on met ensemble un sous-ensemble à* 2 *éléments de* A ($\binom{3}{2} = 3$ *possibilités) et un sous-ensemble à* 4 *éléments de* $\complement_E A$ ($\binom{11}{4} = 330$ *possibilités). Au total, il y a donc* $3 \times 330 = 990$ *sous-ensembles* C *solutions.*

Question 9 (2 points)
Quelle est la valeur exacte de $\binom{12}{5} - \binom{12}{4}$?

- [ ] 132
- [x] 297
- [ ] 275
- [ ] 165

Correction. $\binom{12}{5} - \binom{12}{4} = (\binom{11}{5} + \binom{11}{4}) - (\binom{11}{4} + \binom{11}{3}) = \binom{11}{5} - \binom{11}{3} = 462 - 165 = 297.$

Deuxième partie, questions de type ouvert

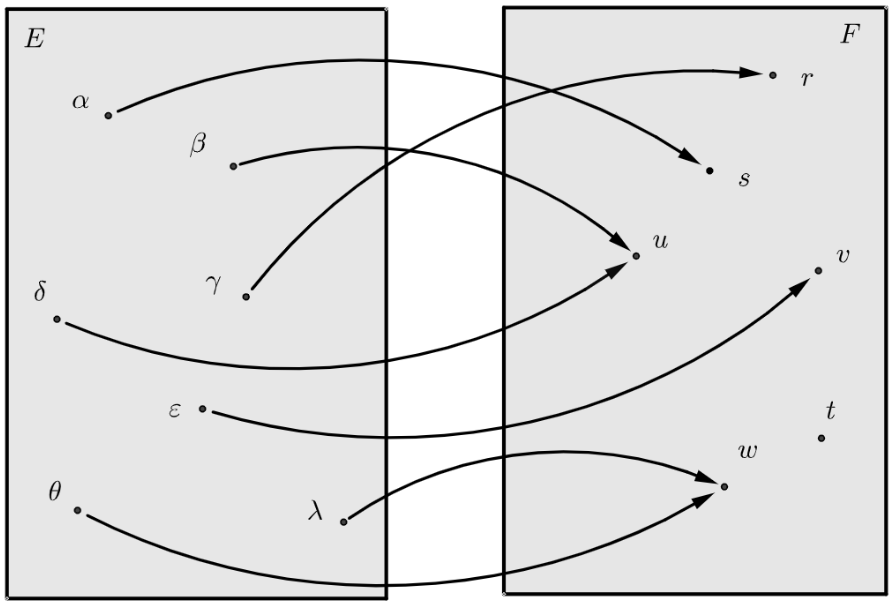
Répondre dans l'espace dédié. Sauf indication contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Soient les ensembles finis E et F et l'application $f : E \to F$ décrits par le dessin ci-dessous.



(a) En détaillant votre démarche, déterminer le sous-ensemble $\complement_F f(A)$ de F où :

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

(b) Pour le sous-ensemble A de E donné au (a), est-il vrai ou faux de dire que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A \ ?$$

Justifier votre réponse.

(c) Donner la définition de $f^{-1}(B)$ où B est un sous-ensemble de F.

(d) En détaillant votre démarche, déterminer $f^{-1}(B)$ pour le sous-ensemble :

$$B = \{s, t, u, v, w\}.$$

(e) Sans aucune justification, déterminer un sous-ensemble C de E **possédant le moins possible d'éléments** et tel que :

$$f(C) = f(f^{-1}(B)),$$

où B est le sous-ensemble de F défini au (d).

(f) Sans aucune justification, définir une application :

$$g : F \to E$$

telle que $\mathrm{Im}(f \circ g)$ possède exactement deux éléments.

Solution

(a) On trouve :

$$\complement_F f(A) = \complement_F \{f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(\delta)\} = \complement_F \{r, s, u\} = \{t, v, w\}$$

(b) C'est vrai. En effet :

$$\begin{aligned} f(x) \in f(A) \quad &\Rightarrow \quad f(x) = r \text{ ou } f(x) = s \text{ ou } f(x) = u \\ &\Rightarrow \quad x = \gamma \text{ ou } x = \alpha \text{ ou } x \in \{\beta, \delta\} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \end{aligned}$$

(c) On a :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Cet ensemble peut aussi être décrit par :

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\}).$$

(d) On trouve :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(\{s\}) \cup f^{-1}(\{t\}) \cup f^{-1}(\{u\}) \cup f^{-1}(\{v\}) \cup f^{-1}(\{w\}) \\ &= \{\alpha\} \cup \varnothing \cup \{\beta, \delta\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{\lambda, \theta\} \\ &= \{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \lambda, \theta\}. \end{aligned}$$

(e) On a :

$$f(f^{-1}(B)) = \{s, u, v, w\}.$$

Le sous-ensemble C doit donc avoir au moins 4 éléments. Pour en créer avec exactement 4 éléments, il faut sélectionner un antécédent pour chaque élément de $f(f^{-1}(B))$. Il y a 4 possibilités pour C :

$$\{\alpha, \beta, \varepsilon, \lambda\}, \ \{\alpha, \beta, \varepsilon, \theta\}, \ \{\alpha, \delta, \varepsilon, \lambda\}, \ \{\alpha, \delta, \varepsilon, \theta\}.$$

(f) Il y a de nombreuses possibilités, comme par exemple :

$$g : F \to E, \ x \to \begin{cases} \alpha \text{ si } x = r \\ \beta \text{ si } x \neq r \end{cases}$$

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

On considère l'application suivante :

$$f :]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{x^2-1}{x-2}.$$

(a) Pour tout $x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{f(x)\})$. Combien a-t-il d'éléments ?

(b) L'application f est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.

(c) Déterminer $\mathrm{Im} f$.

Solution

(a) Soient $x, x' \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x') \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{x'^2-1}{x'-2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2-1)(x'-2) = (x'^2-1)(x-2) \\
&\Leftrightarrow \quad x^2x' - 2x^2 - x' + 2 = x'^2x - 2x'^2 - x + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2x' - x'^2x - 2x^2 + 2x'^2 - x' + x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad xx'(x-x') - 2(x-x')(x+x') + x - x' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-x')(xx' - 2x - 2x' + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = x \text{ ou } xx' - 2x - 2x' + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = x \text{ ou } xx' - 2x' = 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = x \text{ ou } x'(x-2) = 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x' = x \text{ ou } x' = \frac{2x-1}{x-2}.
\end{aligned}$$

Etant donné $x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, on observe maintenant que :

$$\frac{2x-1}{x-2} \neq 2 \text{ (car } 2x-1 \neq 2x-4)$$

si bien que ce qui précède montre que :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x, \frac{2x-1}{x-2}\}$$

Pour connaitre le nombre d'élément de cet ensemble, il reste à étudier l'équation suivante en $x \neq 2$:

$$x = \frac{2x-1}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

On obtient donc finalement :

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \begin{cases} \{x, \frac{2x-1}{x-2}\} & \text{si } x \neq 2, 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{(deux éléments distincts)} \\ \{x\} & \text{si } x = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{(un seul élément)} \end{cases}$$

(b) L'application f n'est pas injective. D'après le travail effectué au (a), on trouve par exemple :

$$f(1) = f(\frac{2-1}{1-2}) = f(-1) \ (= 0).$$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im} f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 2 \ \text{ et } \ f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} = y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 2 \ \text{ et } \ x^2 - 1 = y(x-2) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 1 = y(x-2) \end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant du fait que $x = 2$ n'est pas solution de l'équation. Poursuivons :

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im} f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - xy + 2y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{(-y)^2 - 4(2y-1)}_{\Delta} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 - 8y + 4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Le trinôme en y obtenu a pour racines $4 \pm 2\sqrt{3}$, et il positif en dehors des racines. On a donc :

$$\operatorname{Im} f =]-\infty, 4 - 2\sqrt{3}[\cup]4 + 2\sqrt{3}, +\infty[\,.$$